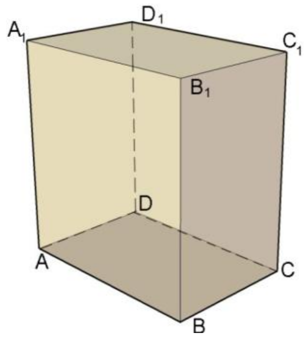
Параллелепипед

Термин «параллелепипедальное тело» встречается впервые у Евклида и означает дословно «параллеле» - плоскостное тело.

Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм.



Стороны параллелограмма называются ***ребрами*** параллелепипеда, а их вершины – ***вершинами*** параллелепипеда.

A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 – вершины параллелепипеда.

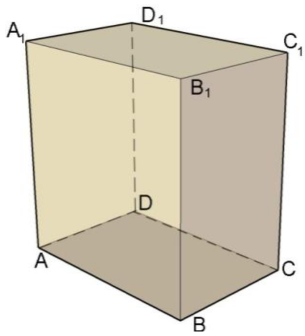
AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра параллелепипеда.

Две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называются ***противолежащими***. A и A_1 – противолежащие вершины.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются ***противолежащими***. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – противолежащие грани.

Две грани параллелепипеда имеющие общее ребро называются ***смежными***. ABB_1A_1 и BCC_1B_1 – смежные грани.

Теорема. У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.



Доказательство. Рассмотрим две противолежащие грани параллелепипеда $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

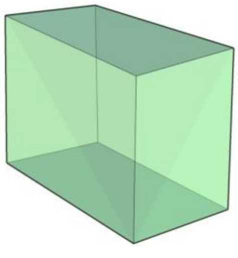
Поскольку все грани параллелепипеда являются параллелограммами, то прямая AB параллельна прямой A_1B_1, а прямая BC параллельная прямой B_1C_1. Следовательно, плоскости, содержащие грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны.

Отрезки CD и C_1D_1, а также отрезки DA и D_1A_1 параллельны и равны. Следовательно, грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны.

Аналогично доказывается параллельность и равенство любых двух противолежащих граней параллелепипеда.

Теорема доказана.

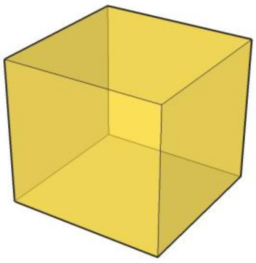
Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны основаниям, называется ***прямым***. У прямого параллелепипеда боковые грани – прямоугольники.



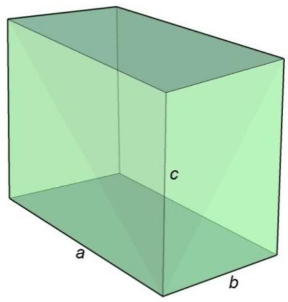
Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется ***прямоугольным***.

Всякий прямоугольный параллелепипед является прямым параллелепипедом, но не любой параллелепипед есть прямоугольный. Основанием прямого параллелепипеда может служить параллелограмм, не являющийся прямоугольником.

Куб - это прямой параллелепипед, все грани которого являются равными квадратами.



Длины трех ребер, выходящих из одной вершины, называются ***измерениями*** прямоугольного параллелепипеда.



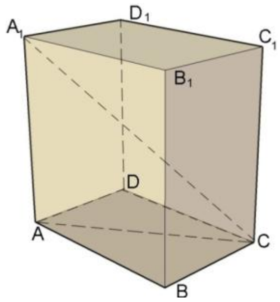
Задание 1. Решите задачу…

1)	Чему равна площадь основания прямоугольного параллелепипеда со сторонами основания 6 см и 7 см?	42
2)	Чему равна площадь большей боковой грани прямого параллелепипеда, если его высота 10 см, а стороны основания равны 7 см и 9 см?	90
3)	Чему равна площадь меньшей боковой грани прямого параллелепипеда, если его высота 5 см, а стороны основания равны 7 см и 9 см?	35
4)	В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат площадью 16 см^2. Чему равна высота параллелепипеда, если площадь боковой грани равна 20 см^2?	5
5)	Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите ребра параллелепипеда, если AB:BC=4:5, BC:BB_1=5:6.	8; 10; 12

6) Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Вычислите длину его бокового ребра, если AB=3 см, BC=4 см и B_1D=5 $\sqrt{2}$ см. 5

Диагонали параллелепипеда

Теорема. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

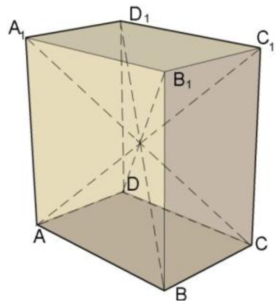


Доказательство. Рассмотрим прямоугольные треугольники ACA_1 и ABC.

По теореме Пифагора, $AC_1^2=AC^2+AA_1^2$, $AC^2=BC^2+AB^2$, откуда $AC_1^2=BC^2+AB2+AA_1^2$, так как ребра AB, BC и AA не параллельны (их длины являются линейными размерами параллелепипеда).

Теорема доказана.

Отрезок, соединяющий противолежащие вершины параллелепипеда, называются ***диагональю*** параллелепипеда.



У параллелепипеда всего четыре диагонали. Все четыре диагонали параллелепипеда равны между собой.

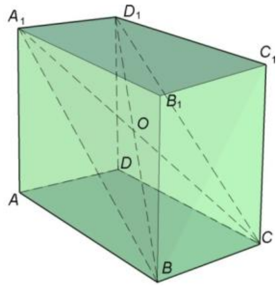
CA_1, DB_1, AC_1, BD_1 – диагонали параллелепипеда.

Сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер:

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=4a^2+4b^2+4c^2.$$

Диагонали прямого параллелепипеда вычисляются по формулам: $d_1^2=a^2+b^2+c^2+2abcos\alpha$; $d_2^2=a^2+b^2+c^2-2abcos\alpha$

Теорема. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.



Доказательство. Пусть A_1C и BD_1 – две диагонали параллелепипеда.

Четырехугольник BCD_1A_1 является параллелограммом, так как четырехугольники $ABCD$ и ADA_1D_1 параллелограммы.

Диагонали A_1C и BD_1 параллелепипеда служат диагоналями параллелограмма BCD_1A_1. Следовательно, эти диагонали пересекаются и точкой их пересечения делятся пополам.

Аналогично доказывается, что диагонали AC_1 и B_1D пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Отсюда следует, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

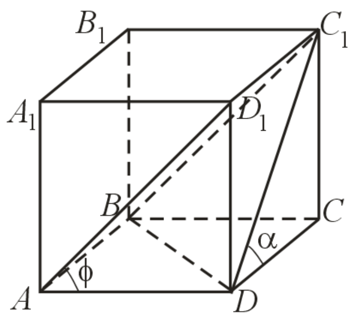
Теорема доказана.

Задание 2. Решите задачу…

1) Чему равна диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями 8, 9 и 12?	17
2) Чему равна диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3 см, 4 см и 12 см?	13
3) Чему равна диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4 см, 12 см и 18 см?	22
4) Чему равна диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 2, 3 и 6 см?	7
5) Чему равен квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем измерениям 2, 3 и 6 см?	49
6) В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Высота параллелепипеда равна 7 см, диагональ 9 см. Найдите сторону основания.	4
7) Высота прямоугольного параллелепипеда равна 9 см, его диагональ – 11 см. Чему равна другая сторона основания, если длина первой стороны 2 см?	6
8) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 6 см. Чему равна высота параллелепипеда, если в его основании лежит квадрат со стороной 4 см?	2
9) В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 6 см. Чему равна высота параллелепипеда, если его диагональ равна 9 см?	3
10) Чему равна диагональ боковой грани прямого параллелепипеда, если в его основании ромб со стороной 3 см, а высота параллелепипеда равна 4 см?	5
11) Чему равна диагональ грани куба, если его сторона равна $2\sqrt{2}$ см?	4
12) Найдите сторону куба, если диагональ грани равна $5\sqrt{2}$ см?	5
13) Чему равна сторона куба, если его диагональ равна $4\sqrt{3}$ см?	4

14)	Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 см и 4 см. Чему равна высота параллелепипеда, если его диагональ составляет с плоскостью основания угол 45^o?	5
15)	В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45^o. Найдите боковое ребро параллелепипеда.	13
16)	Сумма площадей трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 $дм^2$, а его ребра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.	$2\sqrt{122}$
17)	Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.	26
18)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат со стороной 6 см. Диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом 60^o. Найдите периметр четырехугольника AB_1C_1D.	36
19)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$- прямоугольный параллелепипед, основание которого – квадрат. Боковое ребро параллелепипеда равно 4 см. Точка F лежит на диагонали B_1D параллелепипеда так, что $B_1F:FD=3:1$. Найдите сторону основания параллелепипеда, если длина отрезка $FT=\sqrt{5}/2$ см, где T – точка по которой прямая k, проходящая через точку F параллельно прямой AB_1, пересекает плоскость ABC.	2
20)	Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны 3 см и 4 см, если она образует с плоскостью основания угол 60^o.	10

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней образуют с плоскостью основания углы ϕ и α. Найдите угол между этими диагоналями.



Дано: ϕ, α

Найти: $\angle(CD_1, AC_1)$

Решение:

Пусть CD_1 и AC_1 – непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней. Они являются скрещивающимися.

Чтобы отыскать угол между CD_1 и AC_1, найдем угол между BD_1 и CD_1 (так как $BD_1 \| AC_1$).

Обозначим AC, C_1C и CD буквами x, y и z соответственно. Тогда $\frac{x}{y} = \operatorname{ctg}\varphi$, $\frac{z}{y} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Рассмотрим треугольник BD_1C: $BC^2=BD_1^2+CD_1^2 - 2BD_1\cdot CD_1\cos\angle BD_1C$, т.е. $x^2+z^2=x^2+y^2+y^2 - 2\sqrt{y^2+x^2}\sqrt{y^2+z^2}\cos\angle BD_1C$.

Разделив обе чести на y^2, получим: $0=2 - 2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\sqrt{1+\frac{z^2}{y^2}}\cos\angle BD_1C$.

Отсюда $\cos\angle BD_1C=\frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\sin\phi\sin\alpha$. $\angle BD_1C=\arccos(\sin\phi\sin\alpha)$.

Ответ: $\arccos(\sin\phi\sin\alpha)$

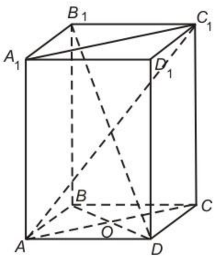
Задание 3. Решите задачу…

1)	Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2)	Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы 30^o и 60^o. Вычислите величину $A=\sqrt{\frac{10}{3}}\operatorname{tg}\alpha$, где α - угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.	1
3)	В прямоугольном параллелепипеде непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней образуют с плоскостью основания углы, синусы которых равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между этими диагоналями.	60
4)	Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если AC_1=12 см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол в 30^O, а с ребром DD_1 – угол в 45^O.	6; 6; $6\sqrt{2}$

5)	В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45^{O}. Найдите боковое ребро параллелепипеда.	13
6)	На ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер. Найдите угол, который образует с диагональной плоскостью AA_1C_1C прямая C_1D.	30
7)	На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка Q - середина этого ребра. Найдите угол, который образует с плоскостью BC_1Q прямая CD_1.	45
8)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб со стороной 9 см. Найдите длину отрезка CO, где точка O – точка пересечения диагоналей грани ADD_1A_1.	1
9)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Найдите длину отрезка AO, где точка O – точка пересечения диагоналей грани BB_1C_1C, если CC_1=12 см, AB=6 см, BC=$2\sqrt{7}$ см.	10
10)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб со стороной 4 см. Найдите длину отрезка AO, где точка O – точка пересечения диагоналей грани BCC_1B_1.	4
11)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Найдите длину отрезка AO, где точка O – точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, если AA_1=4 см, а в основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной $3\sqrt{2}$ см.	5
12)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб со стороной 9 см. Найдите длину отрезка D_1O, где точка O – точка пересечения диагоналей грани BCC_1B_1.	9
13)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Найдите длину отрезка AO, где точка O – точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, если AA_1=4 см, AB=4 см, BC=$2\sqrt{5}$ см.	

Диагональное сечение параллелепипеда

Пример 2. Основание прямого параллелепипеда – ромб со стороной 4 см. Диагонали параллелепипеда образуют с основанием углы в 30^{O} и 45^{O}. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $ABCD$ – ромб,

AB=4 см, $\angle C_1AC=30^{O}$, $\angle B_1DB=45^{O}$

Найти: S_{AA1C1C}, S_{DD1B1B}

Решение:

$S_{AA1C1C}=AC\cdot AA_1$, $S_{DD1B1B}=DB\cdot DD_1$.

Следовательно, для нахождения площадей диагональных сечений необходимо найти длины диагоналей основания и высоту параллелепипеда.

Пусть $CC_1=x$. В треугольнике ACC_1 ($\angle ACC_1=90^{O}$, $\angle C_1AC=30^{O}$, $CC_1=x$) катет $AC=CC_1\text{ctg}30^{O}=x\sqrt{3}$.

В треугольнике B_1BD ($\angle BOC=90^{O}$, $BO=BD/2=x/2$, $OC=AC/2=x\sqrt{3}/2$).

$BC^2=BO^2+OC^2$. Отсюда x=4 см. Таким образом, $AC=4\sqrt{3}$, DB=4 см.

$S_{AA1C1C}=AC\cdot AA_1=16\sqrt{3}$ см^2, $S_{DD1B1B}=DB\cdot DD_1=16$ см^2.

Ответ: $16\sqrt{3}$ см^2, 16 см^2

Задание 4. Решите задачу…

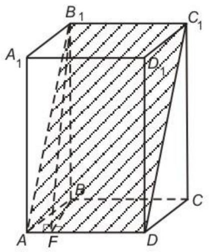
1)	Чему равно ребро куба, если площадь его диагонального сечения равна $25\sqrt{2}$ см^2?	5
2)	В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной 4 см и острым углом 60^{O}. Найдите площадь меньшего диагонального сечения параллелепипеда, если площадь боковой грани равна 20 см^2.	20
3)	Через два противоположных ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба.	8
4)	Вычислите площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда, если его высота 6 см, а стороны основания равны 3 см и 4 см.	30
5)	Площади диагональных сечений прямого параллелепипеда в основании которого лежит ромб равны 48 см^2 и 36 см^2. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда, если его высота равна 6 см.	144

6)	Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Площади диагональных сечений равны 4 см^2 и $2\sqrt{5}$ см^2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.	12
7)	Основанием прямого параллелепипеда служит равнобедренная трапеция *ABCD*. *AB*=*CD*=13 см, *BC*=11 см, *AD*=21 см. Площадь его диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислите полную поверхность параллелепипеда.	906
8)	В основании прямого параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Чему равна площадь диагонального сечения параллелепипеда, если длина его диагонали 10 см.	$25\sqrt{3}$
9)	Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60^{O}. меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см^2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.	$20(23+6\sqrt{3})$
10)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Параллельно диагонали AC_1 проведена прямая, пересекающая отрезки AC и CC_1 в точках К и М соответственно, причем $CM=MC_1$, АК=КС. Найдите площадь диагонального сечения куба, если площадь треугольника КМС=2 см^2.	16
11)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Параллельно диагонали AC_1 проведена прямая, пересекающая отрезки АС и CC_1 в точках К и М соответственно, причем $CM=MC_1$, АК=КС. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, если площадь треугольника КМС=4 см^2.	32
12)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Параллельно диагонали AC_1 проведена прямая, пересекающая отрезки АС и CC_1 в точках Р и О соответственно, причем $CO=OC_1$, АР=РС. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, если площадь треугольника КОС=3 см^2.	24
13)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Найдите угол между диагональю параллелепипеда D_1B и плоскостью основания, если площадь диагонального сечения равна $25\sqrt{3}$ см^2, а площадь основания – 12 см^2.	60
14)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб. Найдите угол, который образует с диагональной плоскостью AA_1C_1C прямая C_1D.	30

15) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 12 см^2. Найдите площадь меньшего диагонального сечения параллелепипеда, если площадь большего диагонального сечения равна $2\sqrt{5}$ см^2. 4

Сечения параллелепипеда плоскостью

Пример 3. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб. Сечение, проходящее через ребра AD и B_1C_1, наклонено к плоскости основания под углом 30^O. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь данного сечения равна 20 см^2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед.

$S_{сеч}$=20 см^2, $\angle B_1FB=30^O$

Найти: $S_{бок}$

Решение:

Площадь боковой поверхности данного параллелепипеда находится по формуле $S_{бок}=4AD\cdot BB_1$.

Пусть B_1F – высота параллелограмма AB_1C_1D, являющегося данным сечением. Тогда $BF\perp AD$ (прямая AD перпендикулярна наклонной B_1F, следовательно, она перпендикулярна и ее проекции BF).

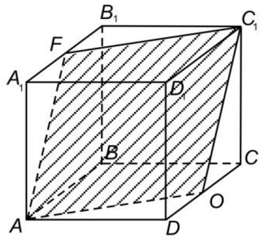
По условию задачи $S=AD\cdot B_1F$. В прямоугольном треугольнике B_1BF ($\angle B_1BF=90^O$, $\angle B_1FB=30^O$) катет, лежащий против угла в 30^O, равен половине гипотенузы, следовательно, $B_1F=2BB_1$.

Таким образом, $S=AD\cdot B_1F=2AD\cdot BB_1$. Отсюда $AD\cdot BB_1=S/2=10$ см^2.

Теперь находим площадь боковой поверхности параллелепипеда: $S_{бок}=4AD\cdot BB_1=4\cdot 10=40$ см^2.

Ответ: 40 см^2

Пример 4. Площадь поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 54 см^2. Точки F и O – середины ребер A_1B_1 и CD соответственно. Найдите периметр четырехугольника AFC_1O.



Дано: S=54 см^2

Найти: P_{AFC1O}

Решение:

Периметр четырехугольника $P_{AFC1O}=AF+FC_1+C_1O+OA$.

Треугольники AA_1F, C_1B_1F, C_1CO, ADO попарно равны между собой (по углу и двум сторонам). Следовательно, $P_{AFC1O}=4AF$.

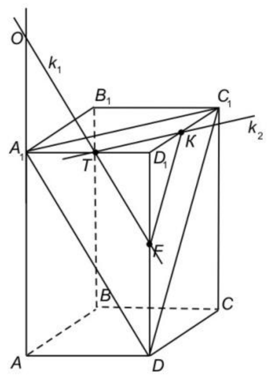
Грани куба – квадраты, значит, площадь грани данного куба равна 9 см^2, а длина его ребра – 3 см.

В прямоугольном треугольнике AA_1F ($\angle AA_1F=90^{O}$, $A_1A=3$ см, $AF=1{,}5$ см) длина гипотенузы $AF=\sqrt{AA_1^2+A_1F^2}=3\sqrt{5}/2$ см.

Отсюда $P_{AFC1O}=4AF=6\sqrt{5}$ см.

Ответ: $6\sqrt{5}$ см

Пример 5. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат со стороной 1 см. Точка O лежит на продолжении ребра AA_1 так, что $AA_1:A_1O=2:1$. Вычислите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку O и параллельной плоскости A_1C_1D, если длина бокового ребра параллелепипеда равна 2 см.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед,

$AB=BC=CD=DA=1$ см, $AA_1:A_1O=2:1$,

$AA_1=2$ см.

Найти: $S_{сеч}$

Решение:

Построим сечение. $T=k_1\cap A_1D_1$, $F=k_1\cap DD_1$, $k_1\parallel AD_1$, $O\in k_1$. $K=k_2\cap D_1C_1$, $k_2\parallel A_1C_1$, $T\in k_2$. Треугольник TKF – искомое сечение.

Точки T, F и K – середины соответствующих ребер, а TF=FK.

В треугольнике TD_1F ($\angle TD_1F=90^o$, $TD=\frac{1}{2}A_1D_1=\frac{1}{2}$ см, $D_1F=\frac{1}{2}DD_1=1$ см) $TF=\sqrt{TD_1^2+D_1F^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ см, $TK=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ см.

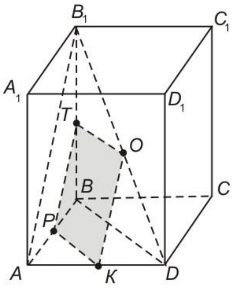
Пусть точка P – середина отрезка TK, тогда медиана PF является высотой равнобедренного треугольника TFK, следовательно, его площадь $S_{TFK}=\frac{1}{2}TK\cdot PF$.

В треугольнике KPF ($\angle EPK=90^o$, $PK=\frac{1}{2}TK=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $FK=\frac{\sqrt{5}}{2}$) длина катета

PF= $\sqrt{FK^2-PK^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ см. Таким образом, $S_{TFK}=\frac{1}{2}TK\cdot PF=\frac{3}{8}$ см^2.

Ответ: $\frac{3}{8}$ см^2

Пример 6. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат со стороной 1 см, а длина бокового ребра параллелепипеда равна 3 см. Точки P, T, O и K являются серединами отрезков AB, BB_1. B_1D и AD соответственно. Вычислите периметр четырехугольника PTOK.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед,

AB=1 см, AA_1=3 см,

AP=PB, BT=TB_1, B_1O=OD, AK=KD.

Найти: P_{PTOK}

Решение:

В треугольнике B_1BD отрезок TO – средняя линия, следовательно TO$\parallel$BD, TO=BD/2.

В треугольнике ABD отрезок PK – средняя линия, значит, PK$\parallel$BD, PK=BD/2.

Отсюда следует, что PK$\parallel$TO, PK=TO, т.е. PTOK – параллелограмм.

Найдем периметр параллелограмма: $P_{PTOK}=2PT+2PK=AB_1+BD$.

AB= $\sqrt{AB^2+BB_1^2}=\sqrt{10}$ см. BD= $\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2}$ см.

Отсюда $P_{PTOK}=AB_1+BD=\sqrt{10}+\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$ см.

Ответ: $\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$ см

Задание 5. Решите задачу…

1) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середины ребер A_1D_1, D_1D и вершину B_1 проведено сечение. Найдите площадь сечения, если длина ребра куба равна $4\sqrt{5}$ см. 90

2) В кубе через сторону основания проведено сечение под углом 30^O к плоскости основания. Найти площадь сечения, если длина ребра куба равна $\sqrt[4]{3}$ см. 2

3) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A, C_1 и середину ребра DD_1 проведено сечение. Найдите длину ребра куба, если площадь сечения равна $50\sqrt{6}$ см^2. 10

4) Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб с острым углом 60^O. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его сечения проходящей через ребро BB_1 и перпендикулярной ребру DC, равна $2\sqrt{3}$ см^2. 16

5) Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб. Сечение, проходящее через ребра AD и B_1C_1, наклонено к плоскости основания под углом 30^O. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь данного сечения равна 7 см^2. 14

6) Через концы трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, косинус которого равен 1/8. Стороны основания 5 см и 3 см. Найдите площадь сечения. 60

7) Площадь сечения куба, представляющего собой правильный шестиугольник, равна $3\sqrt{3}$ см^2. Найдите полную поверхность куба. 24

8) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45^O. Полученное сечение имеет площадь, равную $3\sqrt{2}$ см^2. Найдите боковую поверхность параллелепипеда. 12

9) В прямоугольном параллелепипеде длина диагонали основания равна 5 см, а косинус угла, который она составляет с большей стороной нижнего основания, равен 0,8. Через эту и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, косинус угла наклона которой к плоскости нижнего основания равен 0,3. Найдите площадь этого сечения. 40

10) В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания имеет длину 3 и составляет со стороной основания угол 45^O. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45^O. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда. 18

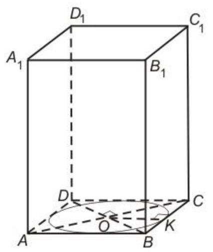
11) Точки O и K – середины ребер CC_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите длину ребра куба, если периметр сечения, проходящей через прямую DO параллельно KC равен $4\sqrt{5}$ см. 2

12) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости AB_1D_1, если площадь треугольника AB_1D_1 равна 56 см^2. 14

13)	Точка O делит ребро A_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении 2:3 ($A_1O:OD_1$=3:2). Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку O и параллельной плоскости AB_1C, если площадь треугольника AB_1C равна 50 см^2.	8
14)	На ребрах BB_1, DD_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R – середины этих ребер. Найдите угол, который образует с секущей плоскостью, проходящей через точки P, Q и R прямая A_1C.	90
15)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, у которого AB=6 см, BC=10 см и AA_1=8 см. Вычислите площадь сечения параллелепипеда, которое проходит через вершину C перпендикулярно диагонали $DC_{1.}$	75
16)	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат со стороной 8 см. Площадь сечения, проходящего через диагональ основания DB равна $24\sqrt{6}$ см^2. Найдите угол между сечением и прямой AC, если сечение является равнобокой трапецией.	60
17)	В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание ABCD – квадрат со стороной 4 см. Точка K делит отрезок AC в отношении 1:3, считая от вершины A. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, содержащей точку K и перпендикулярной плоскостям ABC и AA_1C, если AC_1=8 см.	16
18)	В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковая грань DD_1C_1C – квадрат. Точка M делит отрезок D_1C в отношении 1:5, считая от вершины D_1. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, содержащей точку M и перпендикулярной плоскостям BCD_1 и DCC_1, если DD_1=6 см, BD_1=12 см.	24
19)	Точка P – середина ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основание которого – квадрат $ABCD$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BD, если AD=4 см, $AA_1=2\sqrt{2}$ см.	8
20)	Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб с углом 30^O при вершине A. Вычислите площадь сечения, проходящего через сторону DC и середину ребра BB_1, если длина стороны ромба равна 10 см, а сечение наклонено к плоскости основания под углом 60^O.	100
21)	Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм $ABCD$, площадь которого 40 см^2. Вычислите	80

площадь сечения параллелепипеда плоскостью ADB_1, если известно, что она образует с плоскостью основания угол 60^{O}.

Пример 7. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом 30^{O}. Найдите радиус окружности, вписанной в основание параллелепипеда, если площадь боковой поверхности параллелепипеда равны 64 см^2, а его высота 2 см.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед, $ABCD$ – ромб, $S_{бок}$=64 см^2, AA_1=2 см, $\angle DAB=30^{O}$

Найти: R

Решение:

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед, точка O – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, $R=OK$ – радиус вписанной в ромб окружности ($OK\perp CD$, $K\in CD$).

В треугольнике CKO ($\angle CKO=90^{O}$, $\angle OCK=15^{O}$) $R=CO\sin15^{O}$.

В треугольнике COD ($\angle COD=90^{O}$, $\angle OCD=15^{O}$) длина катета $CO=CD\cos15^{O}$.

Таким образом, $R=CD\cos15^{O}\sin15^{O}=CD\sin30^{O}/2=CD/4$.

Площадь боковой поверхности $S_{бок}=4CD\cdot AA_1$, отсюда $CD=S/4AA_1$=8 см.

Теперь находим радиус окружности: $R=CD\sin30^{O}/2$=2 см.

Ответ: 2 см

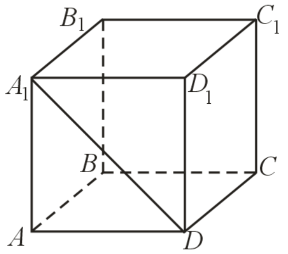
Задание 6. Решите задачу…

1) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом 30^{O}. Найдите радиус окружности, вписанной в основание параллелепипеда, если площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 64 см^2, а его высота – 2 см. 2

2) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с большим углом 120^{O}. Найдите радиус окружности, вписанной в основание параллелепипеда, если сечение, проведенное через меньшую диагональ одного основания и конец большей диагонали другого, составляет с основанием угол 45^{O}, а высота параллелепипеда 12 см. 6

Расстояние между прямыми

Пример 8. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна 2 см. Найдите расстояние между прямыми A_1D и B_1C_1.



Дано: AB= 2см

Найти: A_1B_1

Решение:

Прямые A_1D и B_1C_1 – скрещивающиеся. Поэтому расстояние между ними равно длине общего перпендикуляра к этим прямым.

Таковым является отрезок A_1B_1: $A_1B_1 \perp B_1C_1$ и $A_1B_1 \perp AA_1D_1D \Rightarrow A_1B_1 \perp A_{1D}$. Поэтому расстояние между A_1D и B_1C_1 равно A_1B_1=2 см.

Ответ: 2 см

Задание 7. Решите задачу…

1)	В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB=30 см, AA_1=40 см. Найдите расстояние между BD_1 и AD.	24
2)	Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна 7 см. Найдите расстояние между прямыми A_1D и B_1C_1.	7
3)	Найдите расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36 см^2.	3
4)	Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба равно 2 см. Найдите полную поверхность куба.	72
5)	Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $2\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние между прямыми BD_1 и BC.	2
6)	Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1, если длина куба равна 8 см.	8
7)	Точка O – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние между прямыми B_1D_1 и DO, если ребро куба равно $2\sqrt{6}$ см.	4
8)	Точки P и O середины ребер A_1B_1 и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние от вершины C_1 до прямой PO, если ребро куба равно $4\sqrt{17}$ см.	17

9) Ребро куба равно $5\sqrt{2}$ см. Найти расстояние от плоскости диагонального сечения до не пересекающего его ребра. 5

10) На ребре C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P – средина этого ребра, длина ребра 5 см. Через точки B, D и P проведено сечение. Найдите расстояние от точки A_1 до секущей плоскости. 5